49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Среда, 16 июля 2008 г.

Задача 1. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром в середине стороны BC, проходящая через точку H, пересекает прямую BC в точках A_1 и A_2. Аналогично, окружность с центром в середине стороны CA, проходящая через точку H, пересекает прямую CA в точках B_1 и B_2, и окружность с центром в середине стороны AB, проходящая через точку H, пересекает прямую AB в точках C_1 и C_2. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Задача 2. (a) Докажите, что неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

выполняется для любых отличных от 1 действительных чисел x, y, z таких, что $xyz=1$.

(b) Докажите, что указанное неравенство обращается в равенство для бесконечного числа троек отличных от 1 рациональных чисел x, y, z таких, что $xyz=1$.

Задача 3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число n^2+1 имеет простой делитель, который больше, чем $2n+\sqrt{2n}$.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Четверг, 17 июля 2008 г.

Задача 4. Найдите все функции $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ (то есть, функции, определенные на множестве всех положительных действительных чисел и принимающие положительные значения) такие, что

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

для любых положительных w, x, y, z, удовлетворяющих равенству $wx = yz$.

Задача 5. Пусть n и k — натуральные числа такие, что $k \geq n$, а число $k - n$ четное. Имеются $2n$ лампочек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, 2n$, каждая из которых может находиться в одном из двух состояний: *вкл.* (включена) или *выкл.* (выключена). Вначале все лампочки были выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности *шагов*: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное (с вкл. на выкл., либо с выкл. на вкл.).

Обозначим через N количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все лампочки с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю выключены.

Обозначим через M количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой также все лампочки с 1-й по n-ю включены, все лампочки с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю выключены, но при этом ни одна из лампочек с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю ни разу не меняла своего состояния.

Найдите значение отношения N/M.

Задача 6. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $|BA| \neq |BC|$. Обозначим окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, через ω_1 и ω_2 соответственно. Предположим, что существует окружность ω, которая касается продолжения отрезка BA за точку A, продолжения отрезка BC за точку C, и касается прямых AD и CD. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются на окружности ω.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов