Решения задач
49-й Международной математической олимпиады.

1. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть данные окружности с центрами в B_0 и C_0 пересекаются в точках A' and H. Так как $A'H \perp B_0C_0$, $B_0C_0 \parallel BC$ и $AH \perp BC$, то A' лежит на AH. Далее, $AB_1 \cdot AB_2 = AH \cdot AA'$ и $AC_1 \cdot AC_2 = AH \cdot AA'$, откуда $AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2$. Это означает, что B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности ω. Центр O окружности ω лежит на перпендикуляре к B_1B_2, проходящем через B_0, то есть на серединном перпендикуляре к отрезку CA. Аналогично, O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Отсюда следует, что O — это центр описанной окружности треугольника ABC.

   Таким же образом, докажем, что точки A_1, A_2, C_1, C_2 лежат на окружности ω' с центром O. Значим, $\omega = \omega'$, и указанные в условии шесть точек лежат на одной окружности.

2. Сделаем замену $\dfrac{x}{x-1} = a$, $\dfrac{y}{y-1} = b$, $\dfrac{z}{z-1} = c$, где a, b, c не равны 1. Заметим, что x, y, z однозначно выражаются через a, b, c: $x = \dfrac{a}{a-1}$, $y = \dfrac{b}{b-1}$, $z = \dfrac{c}{c-1}$. Условие $xyz = 1$ переписывается в виде $(a-1)(b-1)(c-1) = abc \Leftrightarrow a+b+c-1 = ab+bc+ca \Leftrightarrow 2(a+b+c-1) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-1 = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c)+1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-1 = (a+b+c-1)^2$. Отсюда вытекает нужное неравенство $a^2+b^2+c^2 \geq 1$.

   Кроме того, из приведенных выкладок ясно, что если $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ и $a+b+c-1 = ab+bc+ca$, то неравенство обращается в равенство при условии $a+b+c = 1$. Иначе говоря, условие обращения неравенства в равенство для чисел $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ эквивалентно системе $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ ab+bc+ca = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1-a-b \\ a+b-a^2-ab-b^2 = 0. \end{cases}$

   Положим $b = \lambda a$, и подставим в уравнение $a+b-a^2-ab-b^2 = 0$. Получим $1+\lambda-a(1+\lambda+\lambda^2) = 0$. Это означает, что при любом λ тройка чисел $a = \dfrac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$, $b = \dfrac{\lambda+\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}$, $c = \dfrac{-\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$ удовлетворяет системе. Если в качестве λ брать натуральные числа, то, как легко видеть, мы получаем бесконечное количество различных троек рациональных чисел a, b, c, отличных от 1. Соответственно, этим тройкам чисел a, b, c соответствует бесконечное количество различных троек рациональных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию.

3. Пусть $N > 20$ — натуральное число. Пусть p — простой делитель числа $(N!)^2 + 1$.

Очевидно, что $p > N$. Пусть r — остаток при делении $N!$ на p. Положим $n = r$, если $r < \frac{p}{2}$, и $n = p - r$, если $r > \frac{p}{2}$. Тогда $n^2 + 1 \equiv (\pm r)^2 + 1 \equiv (N!)^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ и $n < \frac{p}{2}$. Докажем, что число n удовлетворяет условию. Положим $n = \frac{p-x}{2}$, где $x > 0$ — нечетное число. Тогда $4(n^2+1) = (p-x)^2 + 4 = p^2 - 2px + x^2 + 4$ делится на p, а значит $x^2 + 4$ делится на p. Отсюда $x^2 + 4 \geq p$, следовательно $x \geq \sqrt{p-4}$, в частности $x > \sqrt{20-4} = 4$. Имеем: $2n + \sqrt{2n} = p - x + \sqrt{p-x} < p - x + \sqrt{p-4} \leq p$, что и требуется.

Наконец, заметим, что из приведенных рассуждений вытекает, что $n^2 + 1 \geq p > N$, поэтому $n > \sqrt{N-1}$, и значит натуральных чисел n с требуемым свойством бесконечно много.

4. Ответ: $f(x) = x$ и $f(x) = \frac{1}{x}$.

Пусть $w = x = y = z = a > 0$. Тогда из исходного уравнения получаем $\frac{2\left(f(a)\right)^2}{2f(a^2)} = \frac{a^2+a^2}{a^2+a^2} = 1$, откуда для всех $a > 0$ выполнено

$$\left(f(a)\right)^2 = f(a^2) \qquad (1),$$

в частности $\left(f(1)\right)^2 = f(1)$ и $f(1) = 1$ (так как $f(1) \neq 0$).

Далее, положим $w = x = a > 0$, $y = 1$, $z = a^2$: $\frac{2\left(f(a)\right)^2}{f(a^4) + f(1)} = \frac{2a^2}{a^4+1}$. Согласно (1), $f(a^4) = \left(f(a^2)\right)^2 = \left(f(a)\right)^4$, откуда $\frac{2\left(f(a)\right)^2}{f(a)^4+1} = \frac{2a^2}{a^4+1}$. Положив $t = f(a)$, имеем $\frac{2t^2}{t^4+1} = \frac{2a^2}{a^4+1} \Leftrightarrow t^2a^4 + t^2 = a^2t^4 + a^2 \Leftrightarrow (a^2t^2 - 1)(a^2 - t^2) = 0$. Так как $a > 0$ и $t > 0$, отсюда следует, что для каждого $a > 0$ выполнено $t = f(a) = a$ или $t = f(a) = \frac{1}{a}$.

Предположим, что нашлись положительные a и b, не равные 1 и такие, что $f(a) = a$, $f(b) = \frac{1}{b}$. Тогда положив $w = a$, $x = b$, $y = ab$, $z = 1$, получим (с учетом (1)):

$$\frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{1 + \left(f(ab)\right)^2} = \frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2}. \qquad (2)$$

Если $f(ab) = ab$, то из (2) следует $\frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{1+a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} = b^2 \Rightarrow b^4 = 1 \Rightarrow b = 1$, что противоречит предположению.

Если же $f(ab) = \frac{1}{ab}$, то из (2) следует $\frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{1 + \frac{1}{a^2b^2}} = \frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Rightarrow \frac{a^2b^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Rightarrow a^4b^2 + a^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = 0$ или $a^4 = 1$, что противоречит предположению.

Таким образом, либо для всех $x > 0$ выполнено $f(x) = x$, либо для всех $x > 0$ выполнено $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Непосредственная подстановка показывает, что функции $f(x) = x$ и $f(x) = \dfrac{1}{x}$ подходят.

5. Ответ: 2^{k-n}.

   По условию M равно количеству последовательностей $X = x_1x_2\ldots x_k$, в которых каждый символ x_i равен одному из чисел $1, 2, \ldots, n$, и каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встречается нечетное число раз (такие последовательности назовем последовательностями I типа).

   Число N равно количеству последовательностей $Y = y_1y_2\ldots y_k$, в которых каждый y_i равен одному из чисел $1, 2, \ldots, 2n$, причем каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встречается нечетное число раз, а каждое из чисел $n+1, n+2, \ldots, 2n$ встречается четное число раз. (такие последовательности назовем последовательностями II типа).

   Каждой последовательности $A = a_1a_2\ldots a_k$ II типа поставим в соответствие последовательность $B = b_1b_2\ldots b_k$, в которой $b_i = a_i$, если $a_i \leq n$, и $b_i = a_i - n$, если $a_i > n$. Ясно, что $b_1b_2\ldots b_k$ — последовательность I типа.

   Для решения достаточно доказать, что каждая последовательность I типа поставлена в соответствие ровно 2^{k-n} последовательностям II типа.

   Итак, посчитаем число способов восставить последовательность A II типа по соответствующей последовательности B I типа. Пусть число i встречается в последовательности B ровно l_i раз (l_i — нечетны и $l_1 + l_2 + \ldots + l_n = k$). Тогда в последовательности A по сравнению с B четное количество чисел 1 заменено на $n+1$; количество вариантов такой замены равно 2^{l_1-1} (поскольку количество всех подмножеств множества из l элементов равно 2^l, все подмножества разбиваются на пары (в пару входит подмножество вместе со своим дополнением), и ровно в одном из подмножеств в паре четное число элементов). Аналогично, имеется 2^{l_2-1} вариантов замены 2 на $n+2$, и т.д., 2^{l_n-1} вариантов такой замены n на $2n$. Замены производятся независимо; таким образом, по последовательности B последовательность A восстанавливается $2^{l_1-1} \cdot 2^{l_2-1} \cdot \ldots \cdot 2^{l_n-1} = 2^{l_1+l_2+\ldots+l_n-n} = 2^{k-n}$ способами.

6. Пусть K, L, M, N — точки касания окружности ω с прямыми AB, BC, CD, DA соответственно. Пусть окружности ω_1 и ω_2 касаются отрезка AC в точках P и Q соответственно. Пусть ω_3 и ω_4 — вневписанные окружности треугольников ABC и ADC, касающиеся отрезка AC в точках Q_1 и P_1 соответственно.

   Из условия $AB \neq BC$ вытекает, что точки P и Q_1 не совпадают.

Из равенства отрезков касательных имеем $AB + AD = BK - AK + AN - DN = BK - DN = BL - DM = BL - CL + CM - DM = CB + CD$. Так как $AP = (AC + AB - BC)/2$ и $AP_1 = (AC + CD - AD)/2$, получаем $AP = AP'$, и поэтому $P = P_1$. Аналогично $Q = Q_1$.

Пусть TT', PP', QQ' — диаметры соответственно окружностей ω, ω_1, ω_2, проведенные перпендикулярно AC (пусть точки T и T' обозначены так, что T ближе к прямой AC, чем T'). Касательные к окружностям ω, ω_1, ω_2, проведенные через точки T, P', Q' соответственно, параллельны прямой AC. Окружности ω, ω_1 и ω_3 гомотетичны с центром B, поэтому соответственные точки T, P', Q этих окружностей лежат на прямой, проходящей через точку B, то есть точки B, P', Q, T лежат на одной прямой. Так же, поскольку окружности ω, ω_2 и ω_4 гомотетичны с центром D, точки D, P, Q', T лежат на одной прямой. Следовательно, существует гомотетия с центром T и положительным коэффициентом, переводящая отрезок QQ' в отрезок $P'P$. Эта гомотетия переводит ω_2 в ω_1, поэтому центр T этой гомотетии принадлежит общим внешним касательным окружностей ω_1 и ω_2.